Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2002 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x}+\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{x=\frac{4}{5}}$

2. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy+\dfrac{y^4}{x}=\dfrac{x^2}{y}+y^2, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}=0. \end{cases}$$

$\boxed{x=4,\ y=-2}$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}}>9-|x|.$$

$\boxed{-18\leqslant x<-3,\ 0<x<2,\ x>9}$

4. Один из углов треугольника равен $\frac{3\pi}{4}$, радиус вписанной в него окружности равен 4, а периметр треугольника равен $16\left(6+\sqrt{2}\right)$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

$\boxed{R=26\sqrt{2}+4}$

5. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_2(3-x+y)+3=\log_2(25-6x+7y), \\ y+2=(x-2a)^2+a+2x \end{cases}$$

имеет два решения.

$\boxed{-1<a<3}$

6. Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти:

1. высоту пирамиды;

2. расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3. радиус вписанного в пирамиду шара.

$\boxed{1)\ \frac{56}{3};\ 2)\ 3\sqrt{2};\ 3)\ \frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$