

## Московский физико-технический институт

### Письменный экзамен по математике, 2002 год, вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8 \cos^4 x}{4(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} = x$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{x-1}} \left( \frac{x-8}{x^2-2x-3} \right) + 2 \leq 0.$$

$$8 < x, x > \frac{1}{11}$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 10, \\ \sqrt{x+y} + 2x + y = 16. \end{cases}$$

$$0 \leq x, y = x$$

4. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) окружность касается основания  $BC$ , боковых сторон  $AB$  и  $CD$  и проходит через точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Найти радиус окружности, если  $AD : BC = 9 : 7$ , а площадь трапеции  $S = 8$ .

$$\frac{9\pi}{8\sqrt{7}} = r$$

5. Дано число  $a = 2^{2002} + 3^{2002}$ . Найти последнюю цифру числа  $a$  и остаток от деления числа  $a$  на 11.

$$7 \text{ и } 8$$

6. Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  равна 2. Плоскость  $\alpha$ , параллельная прямым  $SC$  и  $AD$ , пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причем периметр сечения равен  $\frac{32}{5}$ . Найти:

1. в каком отношении плоскость  $\alpha$  делит ребра пирамиды;
2. отношение объемов частей, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает пирамиду;
3. расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости  $\alpha$ .

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ и } \frac{66}{25} \left( \frac{2}{3} \text{ и } \frac{5}{2} \text{ и } \frac{5}{3} \right)$$