Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2001 год, вариант 3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+5x+6} < 1 + \sqrt{x^2+x+1}.$$

$\boxed{x \leqslant -3,\ -2 \leqslant x < \frac{-7+\sqrt{13}}{6}}$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x + \cos x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x + \sin x} = \frac{\sqrt{2}\,\left|1 - 2\sin^2 x\right|}{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

$\boxed{x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = \sqrt{70}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2. Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B. Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2.

$\boxed{A_1A_2 = 8,\ B_1B_2 = 4,\ AB_2 = 2,\ AB = 10,\ BB_2 = 4\sqrt{6}}$

4. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}$. Найти:

1. площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2. расстояние от точки D до плоскости EFK;
3. угол между прямой SD и плоскостью EFK.

$\boxed{1)\ \frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}};\ 2)\ \frac{4}{3\sqrt{5}};\ 3)\ \arcsin\frac{3}{5}}$

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_5\left(x + \sqrt{2-a}\right) + \log_{\frac{1}{5}}(a - 1 - x) = \log_{25} 9$$

имеет решение.

$\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a \leqslant 2}$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z + xy = 0, \\ 3x - 5y + z - y^2 = 0, \\ x - 4y - 2z - yz = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(0;0;0),\ \left(\frac{5}{2}; -5; -\frac{15}{2}\right),\ (7;-7;-7)}$