Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2001 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1.$$

$x_1 = -6$, $x_2 = 4$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x=4\left|\sin x\right|.$$

$x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{5}+\pi n$, $x=\frac{4\pi}{5}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

3. Решить неравенство

$$\log_{(2x+9)}\left(24+2x-x^2\right)+\log_{\sqrt{24+2x-x^2}}(2x+9)\leqslant 3.$$

$-4<x<1-2\sqrt{6}$, $-\sqrt{15}\leqslant x\leqslant -\frac{19}{5}$, $-3\leqslant x\leqslant\sqrt{15}$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=4$ и $AC=2$, проведены биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых:

1. AC, AA_1 и CC_1;
2. AA_1, BB_1 и CC_1.

1) $\frac{\sqrt{15}}{10}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{30}$

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+9y^2-18y\leqslant 0,\\ 2x+3-2xy\leqslant 0.\end{cases}$$

$\left(\frac{3}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R>r$, найти радиус шара, касающего всех четырех шаров внешним образом.

$R\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)r$, $\frac{R\left(R+r-\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{r+\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}-R}$