Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2001 год, вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 7 \cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x + y. \end{cases}$$

$\boxed{\left(0; \log_3 \frac{36}{17}\right), \left(\log_3 \frac{49}{27}; \log_3 \frac{9}{7}\right)}$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x \cos 3x = 6 \cos 2x \cos^2 x.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - x - 2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

$\boxed{x < -2,\ x = -1,\ x > 3}$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC. Найти AB, CD и радиус окружности, если $BC = 4$, $BD = 3$, $\angle BAC = \arccos \frac{1}{3}$.

$\boxed{AB = \frac{12}{\sqrt{17}},\ CD = \frac{7}{\sqrt{17}},\ R = \frac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}}$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

$\boxed{\text{Минимальный путь состоит из отрезков } SP \text{ и } PF, \text{ где } P \in BC,\ BP = \tfrac{1}{3} BC}$

6. Сторону основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно.
Найти:

1. угол между прямыми BA_1 и AC_1;
2. расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;
3. радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

$\boxed{1)\ \arccos \frac{11}{32};\ 2)\ \frac{36}{\sqrt{301}};\ 3)\ 2}$