Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2000 год, вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-x|} \geqslant 0.$$

$\boxed{-2 \leqslant x < 2-\sqrt{2},\ \frac{3}{4} < x \leqslant 3}$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 4x} = \sin 4x - \operatorname{tg} 2x.$$

$\boxed{x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_3^2(x+2y) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2y)\log_{\frac{1}{3}}(x-y) + \log_3^2(x-y), \\ x^2+xy-2y^2 = 9. \end{cases}$$

$\boxed{(3;0),\ \left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)}$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая ℓ касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую ℓ в точке E. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AF = 3\sqrt{2}$, $BE = \sqrt{5}$.

$\boxed{\sqrt{\frac{10}{3}},\ \sqrt{\frac{15}{2}}}$

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax+7a-3$ имеет единственное решение.

$\boxed{0 < a < \frac{3}{16},\ a = \frac{1}{4}}$

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость π перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость π делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью π и расстояние от точки N до плоскости π.

$\boxed{\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{7}{12},\ \frac{C_1D}{CD} = \frac{21}{32};\ \frac{49\sqrt{65}}{576};\ \frac{13}{2\sqrt{10}}}$