Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2000 год, вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \dfrac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

$(4; 2)$, $(-4; -2)$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16\cos 4x\,(1 + 2\cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 2x| - 2} \leqslant \frac{1}{|\log_4 x^2| - 1}.$$

$\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$, $x \geqslant 1$; $x \neq 2$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $CD = 4$, $BD = 5$.

$\frac{27\sqrt{2}}{8}$

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{4x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

$a < 0$, $a = 1$

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\,\mathrm{arctg}(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1. объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
2. площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

1) $\frac{84\sqrt{39}}{55}$; 2) $\frac{1632\sqrt{3}}{275}$