Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1998 год, вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2y+2xy^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4, \\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0. \end{cases}$$

$\boxed{(2;-3),\ (-6;1)}$

2. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5+3\cos 4x}{8}}>-\sin x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

3. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равно 8. Найти радиусы этих окружностей.

$\boxed{\sqrt{10},\ 3\sqrt{10}}$

4. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x=(4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-4a}{27a^4}$ являются целыми.

$\boxed{\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}}$

5. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ $(AD=BC)$, описанная около окружности и такая, что $AB=6$, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$. Найти расстояние от точки D до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса.

$\boxed{\frac{\sqrt{30}}{4},\ \frac{\pi\sqrt{30}}{28}}$

6. График функции $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

$\boxed{a=-4,\ b=5,\ c=-2}$