Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1997 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+\log_6(4\cos x+3).$$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2. Решить неравенство

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3}<-1.$$

$x\leqslant -4,\ 1\leqslant x<3,\ x>5$

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки C и E соответственно так, что CD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ACD, $EC=ED=\frac{4}{9}$, $BC=1$. Найти CD и площадь S треугольника ABC.

$CD=\frac{2}{3},\ S=\frac{3\sqrt{7}}{20}$

4. К графику функции $y=-\frac{x^2}{12}+x-\frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y=3|x+6|-\frac{7}{3}$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\left(-6;-\frac{7}{3}\right)$, если $\angle CAB=2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\angle CBA$.

$\frac{13\sqrt{10}}{16}$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

$\frac{2a^2}{\sqrt{3}},\ \frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$