

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1996 год, вариант 3

1. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC . Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 25, а отношение высоты BD к стороне AC равно $\frac{3}{8}$.

$\frac{3}{8}$

2. Выразить $\log_{600} 900$ через a и b , где $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$.

$\frac{2+3b+ab}{1+3+ab}$

3. Дана функция $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Найти:

1) корни уравнения $f(x) = \frac{10}{7}$;

2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

$1 = \min_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = \frac{1}{2}, \max_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = \frac{9}{10}$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

$(-2; 0); (-3; 3); (-4; 2)$

5. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD , а вершиной конуса является точка O , лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B .

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, R = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$