

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1996 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_{49} (x-1)^2 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} \left(\frac{2x+9}{7x+9} \right) = 0.$$

$$\boxed{x = 0 \text{ или } x = 1}$$

2. Найти все значения a , при которых неравенство

$$\frac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} \leq a$$

является верным при всех значениях x .

$$\boxed{\frac{8}{7} \leq a}$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O . Площади треугольников BOM и COM соответственно равны 25 и 30. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC .

$$\boxed{\frac{11}{3} \sqrt{3}} \text{ площадь } \triangle ABC \text{ равна } 176, \text{ проекция отрезка } OM \text{ на прямую } BC \text{ равна } 2\sqrt{\frac{11}{3}}$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = -\sqrt{2} \cos y, \\ \cos 2y + 2 \sin 2x + \frac{3}{4} = 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u, \mathbb{Z} \ni v, \left(u\sqrt{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)_{1+y}(1-)} \text{)}$$

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и $B_1 C_1$ соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK = 2KC$. Найти:

- 1) расстояние от точки N до прямой AK ;
- 2) расстояние между прямыми MN и AK ;
- 3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK .

$$\boxed{\frac{2\sqrt{17}}{99} \wedge \frac{8\sqrt{17}}{18} \wedge \frac{13}{27} \wedge \frac{13}{27} \wedge 9}$$