Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1996 год, вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{4+3\cos x-\cos 2x}=\sqrt{6}\sin x.$$

$\boxed{\pi+2\pi n,\ \arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

2. Решить неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)<\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right).$$

$\boxed{(-3,-2)\cup(-1,0)}$

3. Равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписан в окружность. Прямая CD, перпендикулярная AB, пересекает окружность в точке P. Касательная к окружности, проходящая через точку P, пересекает прямую AB в точке Q. Найти длины отрезков PA и PQ, если $AC=5$, $\angle ABC=2\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$\boxed{PA=\sqrt{\frac{15}{2}},\ PQ=6}$

4. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-2x^3-8ax^2-4a^2x+5$, $a<0$, и прямая l, заданная уравнением $y=4a^2x+5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

$\boxed{a=-\frac{3}{2},\ y_{\min}=-11}$

5. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD=5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину BC, угол между плоскостями D_1DC и ABC, а также расстояние от точки D до центра сферы.

$\boxed{BC=5\sqrt{6}\text{, угол между плоскостями } D_1DC \text{ и } ABC \text{ равен } \arccos\frac{1}{5}\text{, расстояние от точки } D \text{ до центра сферы равно } 12}$