Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1995 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1.$$

$x = \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$

2. Решить неравенство

$$\log_{1+\frac{6}{25}x} x - 2\log_x \left(1 + \frac{6}{25}x\right) > 1.$$

$\frac{25}{9} < x < \frac{25}{4},\ \frac{5}{6} < x < 1$

3. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D, а продолжение катета AB за точку A — в точке E. Найти площадь треугольника ABC, если $CD = 1$, $AE = 2$, $\angle CAB = \arccos\frac{3}{5}$.

$S = \frac{96}{25}$

4. Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y = ax^2$, $a < 0$ относительно точки $N(b; ab^2)$, где $b > 0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке B_1, Π_2 — в точке B_2 так, что угол B_1B_2N — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке B_1, пересекает отрезок B_2N в точке L. Определить, в каком отношении точка L делит отрезок B_2N. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка B_1L минимальна, если площадь треугольника B_1B_2N равна $\frac{1}{3}$.

$NL : LB = 1 : 2,\ a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2}$

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания прямого кругового конуса вписана в треугольник BC_1D, а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1. Найти объем конуса.

$V = \frac{9\sqrt{14}}{20}\pi$