Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1995 год, вариант 1

1. Через вершины A, B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведена окружность. Известно, что окружность касается прямой CD, а ее центр лежит на диагонали AC. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $AD = 8$.

$\boxed{S = 10\sqrt{3}}$

2. Решить уравнение

$$\log_3(\sin 3x - \sin x) = 2\log_9(17\sin 2x) - 1.$$

$\boxed{x = \pi + \arccos\frac{1}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина гипотенузы AB, а медианы треугольника пересекаются в точке E. Треугольник ABC расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка A лежит на оси Oy, точка D симметрична точке C относительно оси Oy, а точки C, D и E лежат на графике функции $y = (x^2 - 5)^2$. Найти уравнение прямой CD и площадь треугольника ABC.

$\boxed{CD: y = 16,\ S = 18\sqrt{3}}$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

$\boxed{1:1,\ h = \frac{12}{5}}$

5. Найти все значения параметра p, при которых сумма всех корней уравнения

$$\left(x - \frac{9}{4}p\right)^4 - 4p(p-1)\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 - p^3(2p-3) = 0$$

меньше $-5p^2 + 11p + 7$.

$\boxed{-\frac{7}{10} < p \leqslant 0,\ \frac{4}{3} \leqslant p < \frac{7}{5},\ \frac{3}{2} \leqslant p < 2}$