Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1994 год, вариант 2

1. При каких x числа $\arccos\left(4^{-x}/\sqrt{2}\right)$ и $\operatorname{arcctg}\left(2\cdot 4^x-3\right)$ являются величинами двух углов прямоугольного треугольника?

$x=\log_4\frac{3}{2}$, $x=\log_4 5$

2. Решить неравенство

$$\log_{2|x|+1}(3x+2)-\log_{3x+2}(2|x|+1)>0.$$

$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}<x<0$, $x>0$

3. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B=90^\circ$) пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника ABC, если $CO=9$, $OD=5$.

$S=\frac{1323}{20}$ ($AO:OM=5:2$, $\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$, $AB=\frac{63}{2\sqrt{10}}$, $BC=\frac{42}{\sqrt{10}}$)

4. Найти все значения параметра α, $-\pi<\alpha<\pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(1-4x^2-4y^2)(4x^2+15-12y)=0,\\ y\cos\alpha+x\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$\alpha\in\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},-\arccos\frac{3}{4}\right)\cup\left(\arccos\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ ($-\frac{1}{2}<\cos\alpha<\frac{3}{4}$, $\cos\alpha\neq 0$)

5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $11/5$ и составляет с плоскостью основания ABC угол, равный $\operatorname{arctg}\left(5\sqrt{2}/4\right)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объем цилиндра.

$V=70\pi$