

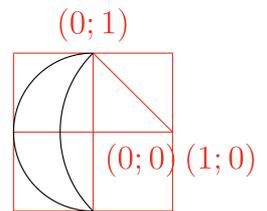
## Олимпиада «Ломоносов» по математике

10 класс, 2024 год

1. Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

9999

2. Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .



К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi}{x\sqrt{x}} + 1$$

3. Решите уравнение:

$$|x^2 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0.$$

(2-3)

4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle ABM = 15^\circ$ ,  $\angle MBN = 45^\circ$  и  $\angle NBC = 75^\circ$ , а сумма и произведение площадей треугольников  $ABM$  и  $NBC$  равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

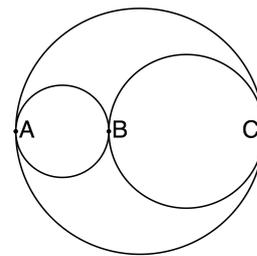
9

5. Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a, b, c > 0.$$

8

6. Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так  $ABC$  что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



061

7. Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ . Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

8

8. Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 100-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

1 - 00101 = u