

Олимпиада «Ломоносов» по математике

7–8 классы, 2023 год

1. Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.



Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

2. Есть три одинаковых кубика, грани каждого из которых покрашены в одни и те же 6 цветов одинаковым образом (каждая грань — полностью в один цвет, разные грани одного кубика — в разные цвета, взаимное расположение цветов на гранях всех кубиков одинаково). Ангелина ставит эти кубики друг на друга и получает башню в форме прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 3$ кубика. Сколько разных раскрасок может иметь получившаяся башня? Раскраски считаются одинаковыми, если получаются друг из друга поворотом всей башни вокруг вертикальной оси.

3. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

4. В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

5. На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал.
2. При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

6. До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{y} = 8; \\ \bar{k} &= 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{c} = 90; \\ \bar{p} &= 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{f} = 500, \bar{x} = 600, \bar{c} = 900. \end{aligned}$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\overline{\text{цла}} = \bar{c} + \bar{l} + \bar{a} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\overline{\text{мд}} = 44$. Или $\overline{\text{ра}} = 101$.

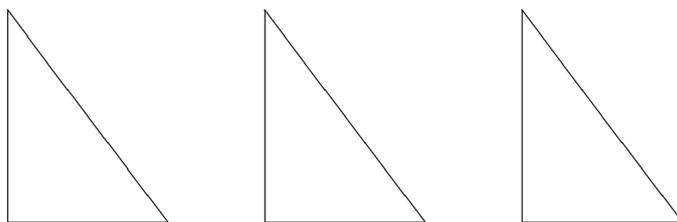
Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\overline{\text{да}}$, $\overline{\text{чух}}$, $\overline{\text{или}}$, $\overline{\text{ал}}$, $\overline{\text{оооо}}$ запрещены.

Найдите два решения ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

7. На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5 (см. рис.). Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вращать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).



Посчитайте, сколько различных «жестких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жесткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим

треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).