

Олимпиада «Ломоносов» по математике

11 класс, 2023 год

1. Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

01-

2. При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234 \sin^{20} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left(\alpha x - \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

6'0-

3. Решите уравнение

$$\log_2(|x^2 - 2|^3 + 1) + \sqrt{4x^4 - 3x^2 + 5} = \sqrt{2x^4 + 5x^2 - 3}.$$

2^7

4. Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 1, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

6

5. Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n . Найдите сумму $s(2^{2023}) + s(5^{2023})$.

2024

6. Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 19$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geq 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2 + 1) \cdot n}{(n - 1)^2 + 1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

2024
1011

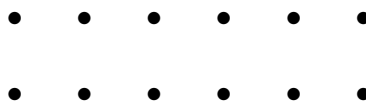
7. На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
2. при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

61

8. Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?



101