Олимпиада «Ломоносов» по математике

7–8 классы, 2022 год

1. Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,?$$

3. Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

4. Для бесконечной последовательности чисел x_1, x_2, x_3, … при всех натуральных $n \geqslant 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Найдите x_{2022}.

5. Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$\left(\overline{ab} + \overline{bc}\right)\left(\overline{bc} + \overline{cd}\right)\left(\overline{cd} + \overline{de}\right) = 157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многозначные числа не могут начинаться с нуля.

6. В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами.) Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?