Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2021 год, вариант 2

1. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

2. Число $x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 4\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x-4}}.$$

3. Сколько существует различных многочленов вида $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 11$, $P(1) = 21$?

4. Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

5. На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

6. В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна S. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

7. На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?