Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2021 год, вариант 1

1. Найдите $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

3. Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2+bx+a=0$ и $x^2+cx+a=1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше -1. Найдите наименьшее значение a.

4. Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

5. Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$?

6. В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна 180°. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна S и $AB=CD$, $AD=BC$.

7. Докажите, что число $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3}+m\sqrt{5}+k\sqrt{7}+l\sqrt{3\cdot5\cdot7},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1-10^{-500}<\sqrt{35}\frac{l}{n}<1$.