

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10 класс, 2020 год

1. Вычислите

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2017\sqrt{1 + 2018 \cdot 2020}}}}$$

8

2. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили красной краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань красная, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите длину параллелепипеда, если она на 2 см больше ширины и на 4 см больше высоты.

18 см

3. Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

2 · 5 · 7 · 100 · 100

4. На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

5. Докажите, что уравнение

$$\sin(2020x) + \cos(2020x) = \frac{x}{5050} + 1$$

имеет по крайней мере 8000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

6. На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M , а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CNM .

1

7. Функция f , заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1. $f(1) + 1 > 0$;

2. $f(x + y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;

3. $2f(x) = f(x + 1) - x + 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(10)$.

101

8. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа $0, 1, 2, \dots, 7, 8, 7, 6, \dots, 2, 1$. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

07