

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2019 год

1. Из поселка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к поселку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привез на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от поселка до станции дачник А проехал на мотоцикле, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 9 раз меньшей скорости мотоцикла?

9/5

2. Найдите целую часть числа $a + \frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}}$.

71

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+2y} + 2^x = 3 \cdot 2^y, \\ 2^{2x+y} + 2 \cdot 2^y = 4 \cdot 2^x. \end{cases}$$

 $\frac{2}{1} = h = x$

4. На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K , причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC .

9/1

5. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1,5$ и $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Существуют ли такие значения n , что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.

001 = u, v, r

6. Найдите все решения неравенства:

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geq \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$.

 $[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap [\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap (\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \cap (0; \frac{\pi}{2}]$

7. Сколько существует значений параметра a , при которых уравнение

$$4a^2 + 3x \lg x + 3 \lg^2 x = 13a \lg x + ax$$

имеет единственное решение?

2

8. Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли её объём быть равным 3,25?