

## Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2024 год

1. Дано число  $2^{2024} \cdot 3^{2023} \cdot 5^{2022}$ . Можно ли расставить все его делители, кроме единицы, по кругу так, чтобы любые два соседних числа не были взаимно просты?

Можно

2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$(x - 1)^3 = \{(x + 1)^3\}$$

(здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ )?

81

3. Последовательность чисел  $a_n$  определяется условиями

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 50, \quad a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{3}{a_n}.$$

Найдите номер первого отрицательного члена этой последовательности.

933 = u

4. Окружность с диаметром  $BD$  касается сторон угла  $A$  в точках  $B$  и  $C$ . Её хорда  $DE$  проходит через середину хорды  $BC$ , а отрезок  $AD$  пересекает окружность в точке  $F$ .

1. Докажите, что хорды  $EF$  и  $BC$  параллельны.
2. Найдите отношение  $EF : BC$ , если угол  $BAC$  равен  $60^\circ$ .

7 : 3 : 7

5. На координатной плоскости в некоторых точках с целыми координатами лежит по камешку (камешков конечное количество). Разрешается делать следующий **ход**: выбрать пару камешков, взять некоторый вектор  $\vec{a}$  с целыми координатами, и далее один из выбранных камешков сдвинуть на вектор  $\vec{a}$ , а другой — на противоположный вектор  $-\vec{a}$ . При этом запрещается класть два камешка в одну точку. Всегда ли можно за несколько ходов добиться того, чтобы все камешки лежали на одной прямой?

Всегда