

Олимпиада «Курчатов» по математике**9 класс, 2023 год**

1. Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

2. Найдите все тройки действительных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

3. Пусть a, b, c и d — наименьшие различные натуральные делители натурального числа n . Оказалось, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 100 = n$. Какие значения может принимать n ?

4. Точка M — середина стороны CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BAM = \angle MAD$, $\angle ABC = \angle BCM + \angle MDA$. Найдите угол CBD .

5. В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.