

Олимпиада «Курчатов» по математике**8 класс, 2023 год**

1. Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

3. Найдите все тройки положительных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

4. На ста карточках написаны числа $1, 2, 2^2, \dots, 2^{99}$ (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычитет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

5. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle PMQ = 90^\circ$, где точка M — середина гипотенузы BC . Найдите длину отрезка PQ , если известно, что $BP = 5$ и $CQ = 12$.