

Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2019 год

1. Из города A в город B , находящийся на расстоянии 240 км от A , со скоростью 40 км/ч выходит автобус. Одновременно с ним из B в A выезжает автомобиль со скоростью v км/ч. Через полчаса после встречи с автобусом автомобиль, не доезжая до города A , поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B . Определить все значения v , при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

(021:99) $\ni a$

2. Окружность ω с центром в точке I вписана в выпуклый четырехугольник $ABCD$ и касается стороны AB в точке M , и стороны CD — в точке N , при этом $\angle BAD + \angle ADC < 180^\circ$. На прямой MN выбрана точка $K \neq M$ такая, что $AK = AM$. В каком отношении прямая DI может делить отрезок KN ? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

I : I

3. Определите все натуральные числа n , имеющие ровно \sqrt{n} натуральных делителей (включая 1 и само число n).

4. Положительные числа a , b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2 + ab + b^2 = 1, \quad b^2 + bc + c^2 = 3, \quad c^2 + ca + a^2 = 4.$$

Найдите $a + b + c$.

 $\frac{1}{2}$

5. В каждой клетке квадратной таблицы размером 200×200 написали по действительному числу, по модулю не превосходящему 1. Оказалось, что сумма всех чисел равна нулю. Для какого наименьшего S можно утверждать, что в какой-то строке или каком-то столбце сумма чисел заведомо окажется по модулю не превышающей S ?