

Олимпиада КФУ по математике

8 класс, 2022 год

1. Три кота — Том, Тим и Там-Там — украли по сосиске и взвесили их. После взвешивания Том сказал: «Если бы моя сосиска была втрое тяжелее, то суммарный вес всех сосисок увеличился бы вдвое». Тим сказал: «То же самое можно сказать и про мою сосиску». А Там-Там подумал и сказал, что так быть не могло. Прав ли он? Обоснуйте свой ответ.
2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может разрезать квадрат тремя прямыми так, чтобы получилось ровно семь частей — три треугольника и четыре четырёхугольника. Прав ли барон? Обоснуйте свой ответ. Разрезы должны идти от края до края.
3. В ряд стоят 30 детей, одетых в синие и красные шапки. Известно, что мальчики в синих шапках и девочки в красных шапках говорят правду, а остальные дети лгут. Каждый мальчик сказал: «*Все мои соседи — в красных шапках*». Каждая девочка сказала: «*Все мои соседи — в синих шапках*». Докажите, что детей в синих шапках не меньше десяти. Соседями друг другу считаются два ребенка, стоящие рядом.
4. На сторонах AB , BC , CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки D , E и F так, что $BD > AF$. Оказалось, что $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle EDF = 90^\circ$. Докажите, что $\angle CEF = 90^\circ$.
5. Положительные действительные числа a , b и c удовлетворяют неравенствам

$$a^2 < b + c, \quad b^2 < c + a, \quad c^2 < a + b.$$

Докажите, что все они меньше 2.