

Олимпиада Innopolis Open по математике

8–9 классы, 2023 год

1. Окружности ω_1 и ω_2 , не имеющие общих точек, касаются окружности Ω внутренним образом в точках A и B , соответственно. Центры окружностей ω_1 и ω_2 расположены по разные стороны от прямой CD — общей касательной этих окружностей, причем точка C лежит на ω_1 , а точка D — на ω_2 . Найдите градусную меру дуги AB окружности Ω , если угол между прямыми AC и BD составляет 55° .

2. Алиса и Боб играют в игру. На плоскости отмечены $n > 1$ точек общего положения (т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой), где n — нечетное натуральное число. Алиса и Боб по очереди (начиная с Алисы) выбирают пару точек и соединяют их отрезком (запрещается повторно соединять точки, которые уже соединены отрезком). Проигрывает тот, после чьего хода образуется цикл нечетной длины.

Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

3. Для всех вещественных $x, y, z \geq 1$ докажите неравенство

$$\frac{x + y + z}{3} + xyz \geq \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \right)^2.$$

4. Весьма нестандартный людоед вечером перед сном поймал дружных математиков. «Сегодня я сыт, но завтра я разделаюсь с вами», — сказал он и потом продолжил: «Сегодняшнюю ночь вы проведете в общей камере, а завтра утром я расскажу вас по отдельным камерам с номерами, потом каждого из вас по отдельности (с глазу на глаз) спрошу, какой номер его камеры, и тех, кто угадает в этой первой попытке, выпущу из их камер у всех на глазах. Но после этого я каждому, кто сразу не угадал номер его камеры, дам еще одну попытку — еще раз (с глазу на глаз) спрошу про номер его камеры, однако, если хоть один из них ошибется — я съем всех!».

Как спастись всем математикам?

5. На столе лежат 16 карточек: на одной из них написано число 1, на второй — 2, на третьей — 3, ..., на последней — 16. Вася перевернул их все и быстро перемешал так, что Петя не успел запомнить местоположение ни одной карточки, а сам Вася запомнил всё.

Петя хочет выложить все 16 карточек в ряд, не переворачивая их, так, чтобы числа на них шли слева направо либо по возрастанию, либо по убыванию. Вася хочет ему в этом помочь. За одну подсказку Вася может указать на две карточки и сказать Пете, чему равен модуль разности чисел на них (не сообщая, какое из чисел больше).

За какое наименьшее количество подсказок Вася может помочь Пете гарантированно добиться цели?