Олимпиада Innopolis Open по математике

10–11 классы, 2023 год

1. В пространстве даны четыре попарно неравных и попарно параллельных отрезка A_iB_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что точки пересечения продолжений боковых сторон шести трапеций $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4)$ лежат в одной плоскости.

2. Натуральные числа вида $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (десятичная запись состоит из n единиц) будем обозначать R_n. Докажите, что существует такое натуральное число k, что R_n делится на 41 тогда и только тогда, когда n делится на k.

3. Пусть a, b, c — взаимно простые в совокупности натуральные числа, и

$$D_n = \left(a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n\right).$$

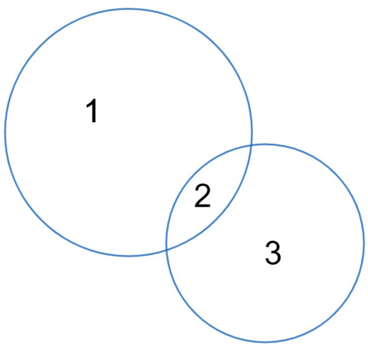
Найдите все возможные значения D_n, где n — натуральное число, кратное 3.

Запись $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ *обозначает наибольший общий делитель целых чисел* a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_k.

Целые числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_k *называются* ***взаимно простыми в совокупности****, если* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$.

4. На плоскости нарисовано несколько окружностей, причем каждая пара окружностей пересекается ровно в двух точках, и никакие три окружности не имеют общей точки. *Круглосторонник* — это часть плоскости, со всех сторон ограниченная дугами этих окружностей, граница которой состоит из каких-то дуг этих окружностей, причем между любыми двумя внутренними точками круглосторонника можно пройти, не пересекая ни одной дуги данных окружностей.

Например, ниже изображены две окружности, образующие 3 *круглосторонника, обозначенные номерами* 1, 2 *и* 3.



Смежные круглосторонники — это круглосторонники, имеющие общую дугу окружности в качестве границы, причем дуга должна быть невырожденной, то есть не сводящейся к одной точке. *Например, на рисунке выше смежными являются круглосторонники* 1 *и* 2, 2 *и* 3, *но не* 1 *и* 3.

Для какого наименьшего $C \geqslant 2023$ можно нарисовать окружности так, что выполнены условия, перечисленные выше, и эти окружности образовывали ровно C круглосторонников?

Докажите, что для любого расположения нарисованных окружностей на плоскости, удовлетворяющих перечисленным условиям и образующих не менее 2023 круглосторонников, обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами.

5. Назовём клетчатый квадрат, каждая клетка которого покрашена в чёрный или в жёлтый цвет, *гармоничным*, если в нём количество чёрных клеток отличается от количества жёлтых клеток не более чем на единицу. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 100×100 в чёрный и жёлтый цвета так, чтобы любой квадрат в этой таблице был гармоничным?