Олимпиада Innopolis Open по математике

7–9 классы, 2021 год

1. В 101-значной десятичной записи числа n используются 11 единиц с равным количеством нулей между ними (других цифр в записи нет). Найдите сумму цифр десятичной записи числа n^2.

2. Числовые ряды использовались в математике на протяжении всей истории науки, и вопросы суммируемости рядов возникали с античных времен. Для сходящихся рядов сумма их слагаемых — число. Для расходящихся рядов сумма всех слагаемых либо не ограничена, либо не определена. Однако, расходящиеся ряды оказываются полезными как в теоретических построениях, так и в прямых вычислениях.

В XVIII веке Леонард Эйлер рассматривал расходящиеся ряды не как сумму их слагаемых, а как формальное выражение, возникшее из какой-либо функциональной зависимости и позволяющее исследовать свойства такой зависимости. В конце XIX века Анри Пуанкаре дал определение асимптотического (вообще говоря, расходящегося) ряда и показал, как строго обосновать использование таких рядов в небесной механике. В самом начале XX века Эмиль Борель ввел одно из наиболее общих определений для расходящихся рядов. Теперь такие ряды широко используются в современной математической физике: например, в задачах квантовой механики.

Примем, что сумма числового ряда $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяет следующим равенствам:

1. $s = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} ka_n = ks$, $k \in \mathbb{R}$;
3. $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, $\quad\Longrightarrow\quad s + t = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n - 4^n + 8^n - \ldots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn}\right).$$

Здесь $p > 1$ — натуральное число. Докажите, что сумма по Борелю S этого ряда удовлетворяет неравенству $S > -1$.

3. На координатной плоскости в точках $(0, 0)$ и $(2m + 1, 0)$ размещены два робота, размерами которых можно пренебречь.

Каждую секунду каждый робот перемещается на вектор длины 1 в одном из двух направлений, случайно выбираемом в начале каждой секунды: первый робот перемещается либо на вектор $(1, 0)$, либо на вектор $(0, 1)$, а второй робот (тот, что начинает движение из точки $(2m+1, 0)$ — либо на вектор $(-1, 0)$, либо на вектор $(0, 1)$. Также им запрещается выезжать за пределы прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = 2m + 1$, $y = n$ (m и n — натуральные числа).

Если робот не может двигаться ни в одном из разрешенных направлений, он выключается. Если два робота одновременно оказались в одной точке, они сталкиваются и ломаются. Найдите вероятность того, что роботы НЕ сломаются до того, как оба выключатся.

4. Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на 90° (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций.

Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.

Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

1. Докажите, что так определенное значение функции высоты $H_T(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v.

2. Назовем кирпичной кладкой разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Назовем приведенной высотой разбиения T величину $h_T(v) = |H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|/4$. Как меняется приведенная высота разбиения при совершении одного флипа?