Олимпиада Innopolis Open по математике

10 класс, 2021 год

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{\ldots}}}}=1024.$$

2. Дана точка A_0 координатной плоскости. Строится последовательность $\{A_k\}$ точек этой плоскости, такая, что для всякого натурального k точка A_k получается из A_{k-1} одним из следующих действий:

1. симметрией относительно прямой $x = 1$;
2. симметрией относительно прямой $y = 1$;
3. инверсией относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$. В таком случае точка A_k лежит на луче с началом в точке O (начало координат), проходящем через точку A_{k-1}, причем $|OA_{k-1}| \cdot |OA_k| = 1$.

Найдите наименьшее n, при котором гарантированно удастся построить последовательность $\{A_k\}$ с условием, что расстояние от A_n до точки $(1, 1)$ не превосходит 10^{-3}.

3. Дан клетчатый прямоугольник $2m\times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на 90° (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций.

Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке. Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G, удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин u и v, ребро между которыми направлено от u к v, либо $H(v) = H(u)+1$, либо $H(v) = H(u) - 3$. Докажите, что $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T.

4. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует единственный набор таких трёх окружностей ω_A, ω_B и ω_C, которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: ω_A касается сторон AB и AC, ω_B касается сторон BA и BC, ω_C касается сторон CA и CB.