

Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2023 год

1. Простые числа p , q и r таковы, что $p < q$, $p + q = r$, $p^2 + q^2 = r^2 - 116$. Найдите p , q и r .
2. $P(x)$ — кубический многочлен с рациональными коэффициентами. Его значение в точке $\sqrt{7}$ составляет 8, а значение его производной в этой же точке равно 56. Найдите все коэффициенты многочлена.
3. Вася написал на доске три числа: $\sin x$, $\sin 2x$ и $\sin 3x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными. Петя пытается определить, какое из чисел где. Определите, какое из трёх утверждений верно:
 1. У Пети всегда получится определить, где $\sin x$, где $\sin 2x$, а где $\sin 3x$;
 2. При некоторых значениях получится, а при некоторых нет.
 3. Никогда не получится.
4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром равным x . S — сфера, вписанная в каркас этого куба (то есть, касающаяся всех его рёбер). Точка M — середина ребра $B_1 C_1$. Прямая AM вторично пересекает сферу S в точке X . Найдите AX .
5. Для произвольных вещественных чисел x, y, z, t , больших 7, докажите неравенство:
$$4 \cdot \sqrt{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)} < (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + (t-4)^2.$$
6. В трапеции $ABCD$ длины диагонали BD и основания BC равны. Точка X на луче BD такова, что $BX = CX$. На прямой CX взята точка Y такая, что $AB = BY$. Известно, что $\angle DBC = \alpha^\circ$, $\angle ABD = \beta^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle BYC$.
7. Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \frac{1}{67}$. Найдите $[x_{66000}]$.
 $[a]$ — целая часть числа a , $\{a\}$ — дробная часть числа a .
8. На бесконечной клетчатой плоскости некоторые клетки покрашены в красный цвет, некоторые — в синий, а некоторые остались непокрашенными. Известно, что в каждой строчке, где есть хотя бы одна синяя клетка, есть также хотя бы 5 красных, а в каждом столбце, где есть хотя бы одна красная клетка, есть хотя бы 6 синих. Какое наименьшее положительное число покрашенных клеток может быть на плоскости?
В этой задаче правильный ответ с примером оценивается в 1 балл, большая часть баллов ставится за доказательство того, что меньше покрашенных клеток быть не может.