

Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2023 год

1. Известно, что $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = 8$, $a + b + c = 30$. Найдите $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Ответ запишите в виде несократимой дроби.
2. Сумма трёх попарно различных натуральных делителей натурального числа n равна 170000. Какое наименьшее значение может принимать число n ? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число.)
3. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Оказалось, что $AD \parallel BC$, $BE \parallel CD$, $AB = 5$, $DE = 6$. $BD = 10$. Найдите AE .
4. Дана трапеция $ABCD$ с прямым углом $\angle A$ и основаниями $BC = 144$ и $AD = 225$. На боковой стороне AB , как на диаметре, построена окружность с центром в точке O , касающаяся стороны CD в точке K . Прямые OK и BC пересекаются в точке L . Найдите длину отрезка CL .
5. Многочлен нечётной степени принимает некоторые значения больше одного раза, однако, никакое значение он не принимает ровно два или три раза. Докажите, что есть значение, которое этот многочлен принимает хотя бы 7 раз.
6. Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \frac{1}{31}$. Найдите $[x_{6000}]$.
 $[a]$ — целая часть числа a , $\{a\}$ — дробная часть числа a .
7. На конференцию приехали 100 учёных. Оказалось, что у любых двоих как минимум двое общих знакомых. Докажите, что у кого-то из них хотя бы 15 знакомых.
8. В клубе «Безумный шляпник» помимо председателя состоят ещё 222 джентльмена. Как-то раз председатель решил подарить каждому из остальных членов клуба новую шляпу с нанесённым на неё именем хозяина. Однако, произошла путаница и шляпы оказались перепутаны. Председатель придумал план по устранению этого беспорядка. Каждый день будет вызывать к себе пятерых джентльменов, усаживать их за круглый стол и просить каждого передать шляпу своему левому соседу. Оказалось, что с помощью такого плана действительно можно передать все шляпы их законным владельцам. Докажите, что председатель может гарантированно справиться с этим за 55 дней.