

**Открытая олимпиада школьников по математике****10 класс, 2022 год**

1. У многочлена  $P(x^2)$  17 различных корней (без учёта кратности). Верно ли, что  $P(0) = 0$ ?
2. Известно, что  $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$ . Найдите  $\cos x \cos 3x$ . Если возможных ответов несколько, запишите их через точку с запятой.
3. Последовательность задана формулой  $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$ . Кроме того известно, что  $x_0 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Найдите  $x_{100}$ .
4. Петя написал на доске число 11234567, а затем все числа, получающиеся из него перестановкой цифр, в порядке возрастания. Каким по счёту оказалось написано число 46753211?
5. Окружности  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  находятся внутри окружности  $O_4$  радиуса 6, касаясь её внутренним образом, а друг друга внешним. При этом окружности  $O_1$  и  $O_2$  проходят через центр окружности  $O_4$ . Найдите радиус окружности  $O_3$ .
6. Обозначим за  $\sigma(n)$  сумму всех делителей числа  $n$  (включая само число). Для каких  $n$  выполняется неравенство  $\sigma(8n) > \sigma(9n)$ ?
7. В таблице  $7 \times 7$  какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?
8. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно такие, что
  1. ни одна из них не является серединой стороны;
  2. прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке;
  3. перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ , также пересекаются в одной точке;
  4. сумма отрезков  $AB_1$ ,  $BC_1$  и  $CA_1$  равна полупериметру треугольника  $ABC$ .

Докажите, что  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  либо точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$ , либо точки касания внеписанных окружностей треугольника  $ABC$  с его сторонами.