

Открытая олимпиада школьников по математике**11 класс, 2021 год**

1. Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4; 9]$ достигается при $x = 5$, а наименьшее — при $x = 7$. Найдите сумму корней многочлена.
2. Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 3000 включительно, имеющих с числом 3000 общие делители, большие 1.
3. Палиндром — это слово, которое не меняется, если в нём переставить буквы в обратном порядке, например \overline{abcba} . Сколько различных 11-буквенных слов можно составить из букв a, b, c, d, e так, чтобы они не содержали палиндромов длины больше 1?
4. Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz = 8$ и $x \leq z$. Докажите неравенство $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \geq \frac{2x}{z}$.
5. Вася выбрал четыре числа и для каждой пары вычислил логарифм большего по основанию меньшего. Получилось шесть логарифмов. Четыре из них равны 15, 20, 21 и 28. Какие значения может принимать наибольший из всех шести логарифмов?
6. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O . K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD и AD соответственно, KP, LQ, MR и NS — высоты в треугольниках OKB, OLC, OMD, ONA . $OP = 15, OA = 32, OB = 64$.
Найдите длину отрезка QR .
7. Два куба с ребром $12\sqrt[4]{\frac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?
8. Гензель и Гретель играют в игру, Гензель ходит первым. Они по очереди ставят фишки на клетчатую доску 7×8 (7 строк и 8 столбцов). Каждый раз, когда Гретель ставит фишку, она получает 4 очка за каждую фишку, уже стоящую в той же строке и 3 очка за каждую фишку, уже стоящую в том же столбце.
На одной клетке может стоять только одна фишка. Игра заканчивается, когда все клетки доски заполнены.
Какое наибольшее количество очков может заработать Гретель вне зависимости от действий Гензеля?