

Открытая олимпиада школьников по математике**10 класс, 2020 год**

1. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна сумме следующих четырёх членов. Найдите $\frac{a_{16}}{a_1}$. (Нумерация членов прогрессии начинается с a_1 .)

2. $ABCD$ — равнобедренная (равнобокая) трапеция с основаниями AD и BC , а $BCDE$ — равнобедренная трапеция с основаниями CD и BE . Докажите, что $\angle BCA = \angle CED$.

3. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $x(y + z) = 1000$.

4. Числа x , y и z положительны, а их произведение равно 1. Докажите, что

$$\sqrt{x + 3y + 5z} + \sqrt{y + 3z + 5x} + \sqrt{z + 3x + 5y} \geq 9.$$

5. $P(x)$ — многочлен седьмой степени, имеющий семь различных вещественных корней. Какое наименьшее число вещественных корней может иметь многочлен $P(P(x))$?

6. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 10×10 в пять цветов так, чтобы в каждом кресте из пяти клеток и любой фигуре, которая может быть его частью, все цвета были различными?

7. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке X . Прямая AX пересекает окружность S_1 в точке A , а окружность S_2 в точке C . Прямая BX пересекает окружность S_1 в точке B , а окружность S_2 в точке D . Окружность S_3 касается прямой BD в точке B и пересекает луч XA в точках A и P . Докажите, что точки P , B , C и D лежат на одной окружности.

8. Докажите, что число $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003}$ раскладывается в произведение хотя бы пяти (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.