

Открытая олимпиада школьников по математике**10 класс, 2019 год**

1. В классе у каждого либо 5, либо 6 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в классе. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?
2. В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое второго, седьмого и девятого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?
3. Может ли число $n^{n^n} - 4n^n + 3$ быть простым при натуральном $n > 2$?
4. Сколько отрицательных чисел среди чисел вида $\operatorname{tg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?
5. Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1 : 3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?
6. Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC , периметр которого 2. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C . Докажите, что $a + b + c \leq 1$.
7. Можно ли расставить в квадратной таблице 100×100 числа от 0 до 9999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?
8. Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 20, x + y + z = 9$. Докажите, что

$$xy + yz + xz \geq 24.$$