Открытая олимпиада школьников по математике

9 класс, 2018 год

1. Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может не иметь корней?

2. На клетчатой доске 10×10 расположены 400 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

3. Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 10 вписаны в одну и ту же окружность так, что точка A_1 лежит на дуге BC, а точка B_1 лежит на дуге AC. Найдите $AA_1^2 + BC_1^2 + CB_1^2$.

4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата периметра, разделённого на 23.

5. Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

6. Даны три окружности радиусов 3, 4 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

7. На плоскости дан набор точек. Известно, что любые три можно параллельным переносом переместить в квадрат с вершинами $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ и $(-2, 0)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все. Докажите.

8. На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 3×3, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более трех общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?