

Открытая олимпиада школьников по математике**11 класс, 2018 год**

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB , BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 10. Найдите длину BD .
2. В равногранном тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что получившийся многогранник — прямоугольный параллелепипед.
3. Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+5}$ и $y = (\ln x - 5)/3$.
4. В некоторой стране 450 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 150 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?
5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.
6. Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 5$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 9} \geq 10.$$

7. Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin 2017x = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos 2017x.$$

8. С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $12341234 \dots 1234$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?