Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2018 год

1. Числовая последовательность задана условием $x_{n+1} = 3x_n + 4x_{n-1}$. Может ли она быть периодической, но не постоянной?

2. Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 10. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

3. Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b, c и d такие, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ и $f(d) = a$?

4. На доске было записано 15 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих пятнадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\frac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

5. Пусть p, q и r — нечётные простые числа. Докажите, что $p^3 + q^3 + 3pqr \neq r^3$.

6. Даны три окружности радиусов 2, 3 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

7. Найдите, чему может быть равно $x + y$, если известно, что

$$x^3 - 6x^2 + 15x = 12 \quad \text{и} \quad y^3 - 6y^2 + 15y = 16.$$

8. На клетчатой доске 9×9 расположены 324 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?