

Открытая олимпиада школьников по математике

7 класс, 2017 год

1. Подряд без пробелов выписали все натуральные числа в порядке возрастания:

1234567891011...

Какая цифра стоит на 2017 месте в получившемся длинном числе?

2. В классе собрались 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 0 до 9 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 101×101 . Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1 \times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что покрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

4. Существует ли натуральное четырёхзначное число с суммой цифр 23, которое делится на 23?

5. Точки B и D взяты по разные стороны от прямой AC . Отрезки BH и DF — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек B и D соответственно. Оказалось, что $AH = HF = FC$ и $DH = AB$. Докажите, что $BC = AD$.

6. Дан ребус: ЖАЛО + ЛОЖА = ОСЕНЬ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы А.

7. У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две неравные части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выигрывает при правильной игре обоих соперников?

8. Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?