Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2017 год

1. Решите уравнение $p^3 - q^3 = 11r$, где p, q, r — простые числа.

2. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 4x\sin y - 4\cos^2 y$.

3. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 100×100 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_k}{4}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

4. Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 1000 с положительными коэффициентами. Пусть $g(x)$ — сороковая производная $f(x)$. Докажите, что $\frac{g(1000)}{f(1000)} < 2^{40}$.

5. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$, CD — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AB. Докажите, что биссектриса угла A пересекает отрезок CH.

6. Сфера радиуса 10 вписана в каркас тетраэдра (т. е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 180. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 3000.

7. Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$ такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + 3$.

8. Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду, умирая, делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 180 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?