Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2015 год

1. Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right| + \dfrac{4x^2}{15} - \dfrac{16}{15} = 0, \\ \dfrac{\ln\left(x + \frac{2}{3}\right)}{\ln 7} + 12x - 5 = 0. \end{cases}$$

2. В пространстве дано сто единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 60?

3. Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

4. Программа «Весёлый многочлен» может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1. превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ — производная многочлена $P(x)$;
2. делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3. прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4. убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена

$$x^{17} + 2x^{15} + 4x^9 + x^6 + 4x^3 + 2x + 1$$

многочлен $3x + 1$?

5. В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основания в четыре раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 130 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 — вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 — сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 — сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т. д.; S_{n+1} — сфера, касающаяся граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

6. $ABCDE$ — вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке E. Прямая BC пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче ED, а L на луче EA. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольников LCD и ACK с ω соответственно (не совпадающие с L и K). Докажите, что прямые AQ и PD пересекаются на прямой EC.

7. Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1+a+b+c = 2abc$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. В клетках таблицы $(2k+1) \times (2n+1)$, где $k \leqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3 так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?