Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2015 год

1. Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^5 - \frac{1}{x^4} \geqslant 9(x-1).$$

2. Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2015}.

3. Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт -2 в каждой точке, где обе эти функции определены. На всякий случай: постоянную функцию мы не считаем дробно-линейной.

4. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}3\alpha$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

5. Числа a, b и c — различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 + bx - c$. Найдите их.

6. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 21$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC — точка L, на стороне BC — точка N. Известно, что $AK = 4$, $CN = 1$, $CL = \frac{20}{21}$. Через точку K провели прямую, параллельную NL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $NLMK$.

7. Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 3×3, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 7. Кто выигрывает при правильной игре?

8. На площади собралось огромное количество юношей и девушек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им галстуки 99 цветов (каждый человек получает один галстук) таким образом, что если какой-то юноша знаком хотя бы с 2015 девушками, то среди этих девушек есть две в галстуках разного цвета и наоборот, если какая-то девушка знакома хотя бы с 2015 юношами, среди них есть юноши в галстуках разных цветов?