

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 11 класс, 2022 год

1. Пусть $a_1 + \dots + a_m = n$, где a_1, \dots, a_m — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_m!$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ отметили середину O медианы AM треугольника $AB' D'$. Оказалось, что эта точка удалена от прямых AB' , AD' и от грани $ABCD$ на расстояние 1. Найдите объём параллелепипеда.

3. Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

4. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машинем рисунке?

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право взять любую колоду из 30 карт. Может ли он подобрать колоду так, чтобы вероятность его выигрыша была больше $1/2$?

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?