

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 9 класс, 2021 год

1. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов?

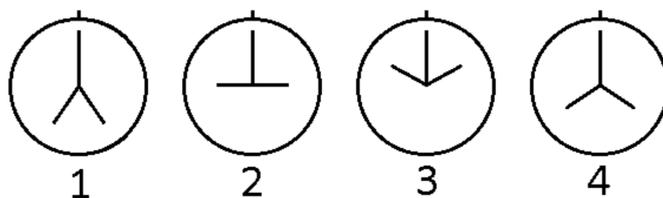
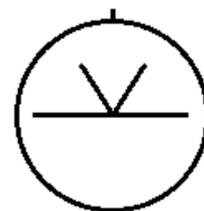
2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$?

Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a , то есть наибольшее целое число, не превосходящее a .

3. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1?

4. На плоскости даны такие четыре точки A, B, C, D , что $AB = BC = CD, BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках.

5. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*. Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).

Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них?

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{32}{y^5} + \frac{48}{y^3} + \frac{17}{y} - 15, \\ \frac{1}{y} = \frac{32}{z^5} + \frac{48}{z^3} + \frac{17}{z} - 15, \\ \frac{1}{z} = \frac{32}{x^5} + \frac{48}{x^3} + \frac{17}{x} - 15. \end{cases}$$