

## Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

## Математика, 8 класс, 2021 год

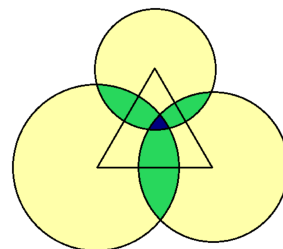
1. Можно ли в выражении  $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$  подобрать натуральные коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном  $n$  делился на 8?

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения  $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$ ?

Символом  $[a]$  обозначается целая часть числа  $a$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .

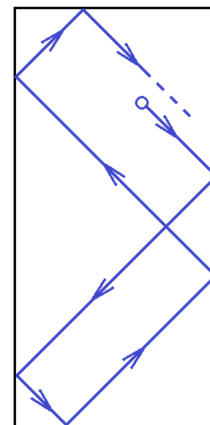
3. В параллелограмме  $ABCD$  ( $AB \neq BC$ ) из тупого угла  $B$  провели две высоты,  $BH$  и  $BK$  (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник  $BHK$  оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла  $BAD$ .

4. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника.



5. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

6. Дан прямоугольник размером  $2021 \times 4300$ . В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол  $45^\circ$  со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом  $45^\circ$ ; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.)



а) Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?

б) Допустим, что стартуя в некоторой точке  $A$ , шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку  $A$ ?