

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 8 класс, 2018 год

1. Пруд имеет форму прямоугольника. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 20,2%, а за вторые — на 18,6% от первоначальной площади. На какой день пруд полностью замёрзнет?
2. Вера заносит свои знания по планиметрии в таблицы, строки которых соответствуют фигурам, а столбцы — свойствам. Если фигура обладает нужным свойством, то на пересечении строки и столбца пишется 1, а в противном случае — 0. В одной из таблиц 4×4 оказалось, что в каждой строке и каждом столбце ровно по одному нулю. Известно, что первый столбец соответствует свойству «есть острый угол», а второй — свойству «есть равные стороны». Подберите ещё два свойства, а для строк — два треугольника и два четырёхугольника, чтобы получить нужную расстановку нулей и единиц.
3. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA = PF$, $PE = PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD .
4. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?
5. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выигрывает, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?