

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 11 класс, 2018 год

1. Прямоугольник 11×12 разрезан на несколько полосок 1×6 и 1×7 . Каково минимальное суммарное количество полосок?

2. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x} \right) \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

3. Существует ли пятизвенная неплоская замкнутая ломаная, все звенья которой равны, а каждые два соседних звена перпендикулярны?

4. Пусть все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E , а прямая CT пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M , причём $MB : MC = TB : TC$.

5. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c) , образующих арифметическую прогрессию ($a < b < c$), для которых числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются точными квадратами?